ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Карпиковой Алины Вячеславовны "Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциальных операторов второго порядка с негладким потенциалом", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Актуальность. Диссертация посвящена спектральному анализу дифференциальных операторов второго порядка (операторов Штурма-Лиувилля). Интерес к исследованию подобного рода операторов, и, в частности, к исследованию операторов Хилла-Шредингера, проявляли многие математики. Так, например, в известной монографии Т.Като "Теория возмущений линейных операторов" для исследования такого рода операторов применяется резольвентный метод. Аналогичному методу исследования следуют Б.Митягин и П.Джаков, А.П.Хромов. А.А. Шкаликов, А.М. Савчук и др. используют метод исследования, основанный на асимптотическом представлении решений соответствующих дифференциальных уравнений. Одна из известных оценок была приведена в статье F.Gesztesy, V.Tkachenko "A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Shrodinger operators with periodic and antiperiodic boundary conditions"J.Diff.Equation, 2012. В этой статье асимптотика собственных значений периодической задачи имеет вид:

$$\lambda_{2k}^{\pm} = \left(2k + \frac{c}{2\pi k} + \frac{h_k^{\pm}}{k}\right)^2, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} |h_k^{\pm}|^2 < \infty.$$

Однако вышеупомянутые методы имеют ряд недостатков, одним из которых является трудность получения оценок возмущенных проекторов, оценок равносходимости спектральных разложений, получение критериев спектральности.

Основным методом исследования в диссертационной работе является метод подобных операторов, развиваемый А.Г.Баскаковым и его учениками. Использование данного метода обусловлено тем, что изучаемые операторы не всегда удовлетворяют условиям, необходимым для применения резольвентного метода.

Метод подобных операторов применяется к исследованию спектральных свойств широкого класса дифференциальных операторов. Описанное в диссертации применение метода позволяет получить уточненную, по сравнению с известной ранее, асимптотику спектра, а также оценки равносходимости спектральных разложений.

2. Структура и основные результаты диссертации. Диссертация изложена на 123 страницах, состоит из введения, по существу совпадающего с авторефератом, четырех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, состоящего из 61 наименования.

В первой главе приводятся основные сведения из теории операторов (первый параграф), которые необходимы при формулировании основных результатов диссертации. Во втором параграфе формулируются определения и теоремы метода подобных операторов. В третьем параграфе вводится в рассмотрение исследуемый дифференциальный оператор второго порядка с негладким потенциалом

$$L_\theta : D(L) \subset L_2[0,\omega] \to L_2[0,\omega], \quad \theta \in [0,1],$$

порожденный на промежутке $[0,\omega]$ дифференциальным выражением

$$l(x) = -x'' - vx,$$

с областью определения

$$D(L_\theta) = \left\{ x \in W_2^2[0,\omega] : x(\omega) = e^{i\pi\theta}x(0), x'(\omega) = e^{i\pi\theta}x'(0) \right\}.$$

Основные результаты содержатся во второй, третьей и четвертой главах. Их научная новизна заключается в следующем.

Во второй главе подробным образом исследуются спектральные свойства абстрактных линейных операторов, близких к изучаемому оператору. Рассмотрения ведутся в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Вводятся ортогональные проекторы Рисса $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{\theta,n}, n \in \mathbb{Z}_+, \theta \in 0,1$, построенные по последовательности собственных значений оператора A_θ. Основным результатом главы является теорема 2.1, в которой получено подобие оператора $A_\theta - B$ оператору, матрица которого блочно-диагональная. В этой теореме невозмущенный оператор A_θ имеет спектральные свойства, близкие к спектральным свойствам оператора $L_\theta^0, \theta \in [0,1]$, а оператор B (возмущение) принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теорема 2.1. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условию*

$$\gamma_{\theta,m}\|B\|_* < \frac{1}{4},$$

где $\gamma_{\theta,m}$ — это постоянная из определения допустимой тройки.

Тогда оператор $A - B = A_\theta - B$ подобен оператору вида

$$A_\theta - J_m\widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{k \geq m+1} \mathbb{P}_k\widetilde{X}\mathbb{P}_k, \quad \theta \in \{0,1\},$$

$$A_\theta - J_m\widetilde{X} = A_\theta - P_{(m)}\widetilde{X}P_{(m)} - \sum_{|k| \geq m+1} P_k\widetilde{X}P_k, \quad \theta \in (0,1).$$

Оператор $\widetilde{X}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B,$$

в котором $J = J_{\theta,m}, \Gamma = \Gamma_{\theta,m}$, и уравнение рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Преобразование подобия оператора $A_\theta - B$ в оператор $A_\theta - J_{\theta,m}\widetilde{X}$ осуществляет оператор $I + \Gamma_{\theta,m}\widetilde{X}$.

Доказательство этой теоремы позволило получить асимптотические формулы для собственных значений рассматриваемых операторов (теорема 2.3). Также, в теореме 2.5, были получены оценки безусловной равносходимости спектральных разложений. Все доказанные результаты этой главы играют важную роль при исследовании рассматриваемого в диссертации оператора Штурма-Лиувилля.

В третьей главе осуществляется предварительное преобразование подобия оператора Штурма-Лиувилля к оператору Гильберта-Шмидта. Данное преобразование описывается в теореме 3.1 и позволяет применить полученные во второй главе результаты. Особое место в этой главе занимают оценки, используемые для получения асимптотики собственных значений возникающих здесь операторов (оценки (3.2) – (3.16)). В приведенных оценках автор детально учитывает поведение коэффициентов Фурье потенциала, вводя, в частности, полезное понятие устойчивого потенциала.

В четвертой главе в теоремах 4.1 - 4.8 приводятся асимптотические оценки собственных значений исследуемого оператора Штурма-Лиувилля. Хотелось бы особо отметить следующий результат.

Теорема 4.7. *Пусть $\theta \in (0,1)$. Тогда существует такое натуральное число $m \geq 1$, что спектр оператора L_θ представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma_n \right),$$

где $\sigma_{(m)}$– конечное множество, состоящее не более чем из $2m+1$ чисел, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+\} \cup \{\lambda_n^-\}, n \geq m+1$, не более чем двухточечные, и имеет место следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n^\mp = (\frac{\pi(2n+\theta)}{\omega})^2 - \widehat{v}(0) + \eta_7^\mp(n),$$

где последовательности $\eta_7^\mp$ удовлетворяют оценкам:

$$|\eta_7^\mp(n)| \leq \frac{1}{n} \beta_7^\mp(n).$$

Последовательности $\beta_7^\mp$ принадлежат пространству l^2.

Оценки равносходимости спектральных разложений приводятся в теоремах 4.9 – 4.11. Для произвольного подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+$ (если $\theta \in \{0,1\}$) вводится проектор $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} \mathbb{P}_k = \sum_{k \in \Omega} \mathbb{P}_{\theta,k}$. Для $\Omega \subset \mathbb{Z}$ (если $\theta \in (0,1)$) через $P(\Omega)$ обозначается проектор $P(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} P_k$. Одним из основных результатов четвертой главы является

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 3.1. Тогда для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z} \backslash \{m, ..., m\}$ имеют место оценки (безусловной равносходимости спектральных разложений):*

$$\|\widetilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 \leq \frac{C(\theta)}{(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}}, \quad \theta \in (0,1), \quad C(\theta) > 0,$$

$$\|\widetilde{\mathbb{P}}(\Omega) - \mathbb{P}(\Omega)\|_2 \leq \frac{C_1}{(\alpha(\Omega))^{\frac{1}{2}}}, \quad C_1 > 0.$$

Полученные результаты являются новыми и более точными, по сравнению с известными ранее.

2. Стиль изложения и полнота отражения результатов диссертационного исследования в публикациях. Результаты диссертационной работы изложены ясно и подробно. Все представленные результаты являются новыми и строго обоснованными с помощью методов функционального анализа, теории операторов, теории функций. Содержание автореферата правильно отражает основные положения диссертации. Основные результаты диссертации получены самостоятельно и своевременно опубликованы в 12 работах без соавторов, из которых три опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Сама диссертация является законченной научно-исследовательской работой.

3. Соответствие диссертации паспорту специальности. Диссертация соответствует квалификационным требованиям п.9 Положения о порядке присуждения ученых степеней и требованиям паспорта специальности 01.01.01-вещественный, комплексный и функциональный анализ.

4. Замечания:

1. Желательно распространение результатов диссертации на векторный случай (системы дифференциальных операторов). Здесь определенные сложности могут возникнуть при оценках собственных значений.

2. Были бы интересны критерии оценок величин $\alpha(\Omega, \widetilde{X})$, участвующих в теореме 4.10, в терминах коэффициентов Фурье потенциала.

Указанные замечания можно рассматривать как пожелания для дальнейшего исследования.

Результаты, полученные в диссертации, и развитые методы представляют собой существенный вклад в спектральную теорию операторов и могут быть использованы для дальнейшего развития этой области функционального анализа.

Считаю, что диссертационная работа Карпиковой Алины Вячеславовны "Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциальных операторов второго порядка с негладким потенциалом"представляет законченную научно-исследовательскую работу, а её автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор ф.-м. наук,
профессор кафедры
высшей математики ФГБОУ ВПО
"Вологодский государственный университет" В.С. Шульман

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
Менеджер по персоналу
отдела кадров
Управления делами /В.Н. [illegible]/
26.10.2015